SPIS TREŚCI

Niniejsza książka powstała po dokonaniu wnikliwej analizy tego, co w kontekście egzaminu maturalnego z matematyki dla ucznia i nauczyciela jest najważniejsze, czyli *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej dla liceum ogólnokształcącego i technikum oraz *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej dla szkoły podstawowej.

Zbiór zadań wydany został w dwóch tomach. Każdy z rozdziałów 1. – 6. w tomie II składa się z trzech części:

1. **CZĘŚĆ TEORETYCZNA** zawiera niektóre definicje oraz wszystkie te wzory i twierdzenia, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań maturalnych. Niektóre definicje i twierdzenia zostały opatrzone przykładami.
2. **ZADANIA WPROWADZAJĄCE** to seria starannie dobranych prostych rachunkowo zadań, odnoszących się do poszczególnych *szczegółowych wymagań egzaminacyjnych.*
   Analiza tych zadań da uczniowi pewność, że nie pominął w przygotowaniach do matury żadnego zagadnienia, które może pojawić się na egzaminie maturalnym.
   Aby ułatwić maturzyście samodzielne przygotowanie do egzaminu, do większości *zadań wprowadzających* podano rozwiązania lub wskazówki.
   Poważne podejście do zadań z tej części rozdziału jest podstawą, a zarazem gwarancją sukcesu na egzaminie maturalnym.
3. **ZADANIA MATURALNE** to zadania otwarte o zróżnicowanej skali trudności. Zadania otwarte to forma zadań, której maturzysta powinien poświęcić najwięcej uwagi. Przykłady innych zadań zamieszczono w rozdziale 7.
   Aby ułatwić korzystanie ze zbioru, ta część rozdziału została podzielona na podrozdziały i sekcje.

Cechą charakterystyczną zbioru jest taki układ zadań, który od ucznia rozwiązującego zadania z danego działu nie wymaga znajomości zagadnień z działów następnych. Jest to duże udogodnienie, szczególnie dla tych maturzystów, którzy mają poważne braki w wymaganej wiedzy.

Mamy nadzieję, że pozycja ta zainteresuje również tych uczniów klas niematuralnych, którzy już myślą o egzaminie maturalnym z matematyki.

Informujemy, że w tomie I książki znalazły się rozdziały:

1. *Wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności algebraiczne.*
2. *Liczby rzeczywiste*
3. *Funkcje*
4. *Funkcja liniowa*
5. *Funkcja kwadratowa*
6. *Wielomiany*
7. *Funkcje wymierne*
8. *Funkcja wykładnicza*
9. *Funkcja logarytmiczna*
10. *Trygonometria*
11. *Ciągi*
12. *Poziom podstawowy - dodatek*
13. *Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania*

PRZYJĘTE W KSIĄŻCE OZNACZENIA

Oznaczenia w części teoretycznej:

⇨ – wiedza teoretyczna obowiązująca na obu poziomach

⇨ – wiedza teoretyczna obowiązująca tylko na poziomie rozszerzonym

Oznaczenia szczegółowych wymagań egzaminacyjnych:

(**P**) – *wymaganie szczegółowe* zawarte w podstawie programowej dla szkoły podstawowej

(**A**) – *wymaganie szczegółowe* dodane przez autora

wymaganie szczegółowe bez oznaczeń – wymaganie zawarte w podstawie programowej dla LO i technikum

Wymagania szczegółowe odnoszące się do poziomu rozszerzonego wyróżnione zostały **wytłuszczoną czcionką w kolorze czerwonym**.

Oznaczenia przy zadaniach:

W – do zadania podano wskazówkę

R – do zadania podano rozwiązanie

* – zadanie o podwyższonej skali trudności

Zadania i podpunkty zadań przeznaczonych dla zdających matematykę także na poziomie rozszerzonym wyróżnione zostały **kolorem czerwonym**.

Np. **599.* R** – trudne zadanie dla poziomu rozszerzonego z rozwiązaniem.

NIEKTÓRE SYMBOLE (OZNACZENIA) MATEMATYCZNE

Symbol (oznaczenie)	Czytamy
$x \in A$	element x należy do zbioru A
$x \notin A$	element x nie należy do zbioru A
$\wedge$	i
$\vee$	lub
$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A - B$ lub $A \setminus B$	różnica zbiorów A i B
$(a;\ b)$	przedział otwarty o końcach a i b
$[a;\ b]$ lub $\langle a;\ b\rangle$	przedział domknięty o końcach a i b
$f: A \to B$	funkcja f ze zbioru A w zbiór B (*czyli funkcja, której dziedziną jest zbiór A, a wartości należą do zbioru B*)

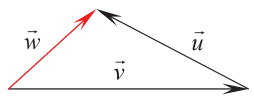
2. GEOMETRIA ANALITYCZNA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

U W A G A. W poniższych wzorach przyjmujemy, że • $A=(x_A,\ y_A)$ i $B=(x_B,\ y_B)$; • $\vec{v}=[v_X,v_Y]$ i $\vec{u}=[u_X,u_Y]$.

WEKTORY

- Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A,\ y_B-y_A]$.
- Równość wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$: $\vec{v}=\vec{u}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_X=u_X$ i $v_Y=u_Y$.
- Długość wektora $\vec{v}$: $|\vec{v}|=\sqrt{v_X^2+v_Y^2}$.
- Mnożenie wektora $\vec{v}$ przez liczbę k
  - analitycznie: $k\cdot\vec{v}=[k\cdot v_X,\ k\cdot v_Y]$.
  - geometrycznie: iloczynem niezerowego wektora $\vec{v}$ przez liczbę $k\neq 0$ nazywamy wektor $\vec{w}$ spełniający warunki
    1. $|\vec{w}|=|k|\cdot|\vec{v}|$
    2. jeżeli $k>0$, to zwrot wektora $\vec{w}$ jest zgodny ze zwrotem wektora $\vec{v}$,
       jeżeli $k<0$, to zwrot wektora $\vec{w}$ jest przeciwny do zwrotu wektora $\vec{v}$.
- Dodawanie wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$
  - analitycznie: $\vec{v}+\vec{u}=[v_X+u_X,\ v_Y+u_Y]$.
  - geometrycznie: konstrukcja sumy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$ (*rysunek obok*)



wektor $\vec{w}$ jest sumą wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$

ODCINEK

- Długość odcinka AB: $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Współrzędne środka $S=(x_S,y_S)$ odcinka AB: $x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$, $y_S=\frac{y_A+y_B}{2}$.

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DANE PUNKTY A ORAZ B

- Jeżeli $x_B\neq x_A$, to prosta przechodząca przez punkty A i B określona jest wzorem $y-y_A=a(x-x_A)$, gdzie $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

RÓWNANIE KIERUNKOWE PROSTEJ: $y=ax+b$

- Jeśli prosta $y=ax+b$ jest nachylona do osi Ox pod kątem α, to $\mathrm{tg}\alpha=a$.
- Proste o równaniach $y=ax+b$ i $y=cx+d$ są równoległe wtedy i tylko, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, czyli wtedy, gdy $a=c$.
- Proste o równaniach $y=ax+b$ i $y=cx+d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych równy jest -1, czyli wtedy, gdy $c=-\frac{1}{a}$.

POSTAĆ OGÓLNA RÓWNANIA PROSTEJ: $Ax+By+C=0$

- Jeżeli $B\neq 0$, to równanie $Ax+By+C=0$ można sprowadzić do postaci kierunkowej.

> Np. aby sprowadzić równanie $3x+5y-10=0$ do postaci kierunkowej, przenosimy (*zmieniając znak*) składniki $\mathbf{3x}$ oraz $\mathbf{-10}$ na drugą stronę równania: $5y=\mathbf{-3x}+\mathbf{10}$, a następnie obie strony otrzymanego równania dzielimy przez 5: $y=-\frac{3}{5}x+2$.

- Każdą prostą można opisać za pomocą równania ogólnego, w szczególności równanie $x+C=0$ jest równaniem prostej równoległej do osi OY.

> Np. prosta o równaniu $x+5=0$, czyli prosta o równaniu $x=-5$, jest równoległa do osi OY i przecina oś OX w punkcie o współrzędnych $(-5,\ 0)$.

⇨ Proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, w szczególności dla dowolnej liczby D prosta $Ax + By + D = 0$ jest równoległa do prostej $Ax + By + C = 0$.

⇨ Proste o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, w szczególności dla dowolnej liczby D prosta $Bx - Ay + D = 0$ (*a także prosta* $-Bx + Ay + D = 0$) jest prostopadła do prostej $Ax + By + C = 0$.

PROSTA PROSTOPADŁA DO WEKTORA

⇨ Dla dowolnej liczby C prosta $Ax + By + C = 0$ jest prostopadła do wektora $\vec{w} = [A, B]$.

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

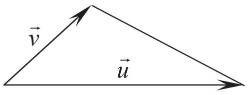
⇨ Odległość d punktu $P = (x_P, y_P)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem $d = \dfrac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

RÓWNANIE OKRĘGU

⇨ Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

POLE TRÓJKĄTA

⇨ $P = \frac{1}{2} \cdot |v_X u_Y - v_Y u_X|$.



ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Maturzysta	• posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaci kierunkowej i ogólnej • rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje

2.1 Dane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej i (o ile to możliwe) w postaci kierunkowej
a) $4x = 2y + 5$; **b)** $12y = 72$; **c)** $7x = 8$.

2.2 Równanie $y = 0{,}25x - 1{,}5$ zapisz w postaci $Ax + By + C = 0$ tak, aby
a) R współczynnik A był równy 3, **b) R** współczynnik B był równy 2, **c)** współczynnik C był równy -6.

2.3 Ustal, czy dane równania opisują parę prostych równoległych.
a) R $y = 7x + 5$ i $y = -7x + 5$; **b)** $y = -7x - 5$ i $y = -7x + 5$; **c) R** $y = -0{,}25$ i $y = 4$
d) $x - 4 = 0$ i $x = -2$; **e) R** $-4x + 6y + 1 = 0$ i $6x - 9y + 3 = 0$.

2.4 Ustal, czy dane równania opisują parę prostych prostopadłych.
a) R $y = 5x + 4$ i $y = 0{,}2x + 4$; **b)** $y = -0{,}25x$ i $y = 4x + 1$; **c)** $y = 4$ i $x = -2$;
d) R $y = (1 - \sqrt{2})x$ i $y = (1 + \sqrt{2})x$; **e) R** $4x - 6y + 1 = 0$ i $9x + 6y + 3 = 0$.

2.5 R Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostych o równaniach
a) $y = 2x + 4$ i $y = -x + 7$; **b)** $y = 4x - 3$ i $y = 4x + 2$;
c) $x = -2$ i $y = -5$; **d)** $4x + 2y - 1 = 0$ i $12x = 3 - 6y$.

Maturzysta	• wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub **prostopadłość** do innej prostej)

2.6 R Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeżeli
a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$; **b)** $A = (-1, -4)$, $B = (1, 2)$; **c)** $A = (-4, 2)$, $B = (1, 2)$;
d) $A = (1, -4)$, $B = (1, 2)$.

2.7 W Zbadaj, czy punkty A, B, C są współliniowe, jeśli
a) $A=(-4,-6),\ B=(-1,2),\ C=(5,6)$; **b)** $A=(-5,-2),\ B=(2,-1),\ C=(8,0)$.

2.8 R Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P=(2,4)$, jeżeli prosta k określona jest równaniem
a) $y=3x-5$; **b)** $y=-2$; **c)** $x=-2$; **d)** $2x+3y+7=0$.

2.9 R Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P=(2,4)$, jeżeli prosta k określona jest równaniem
a) $y=3x-5$; **b)** $y=-2$; **c)** $x=-2$; **d)** $2x+3y+7=0$.

2.10 Wyznacz równanie prostej nachylonej do osi Ox pod kątem o mierze α i przechodzącej przez punkt $P=(2,4)$, jeżeli
a) R $\alpha=60°$; **b)** $\alpha=45°$; **c)** $\alpha=135°$.

Maturzysta	• oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych • **oblicza odległość punktu od prostej** (A)

2.11 Oblicz długość odcinka AB, jeżeli
a) R $A=(-3,4)$ i $B=(0,0)$; **b)** $A=(-2,-1)$ i $B=(10,4)$.

2.12 R Oblicz odległość punktu $A=(-2,-1)$ od prostej o równaniu
a) $y=-0{,}5x+3$; **b)** $y=4$.

2.13 W Punkty $A=(1,-2),\ B=(4,1),\ C=(3,4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz długość wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C.

Maturzysta	• **zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie**

2.14 Dane są wektory $\vec{u}=[-3,-2]$ i $\vec{w}=[-1,4]$. Oblicz współrzędne wektora $\vec{v}$, jeśli
a) R $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$; **b)** $\vec{v}=-\vec{u}$; **c) R** $\vec{v}=5\vec{w}$; **d)** $\vec{v}=3\vec{w}-4\vec{u}$; **e)** $\vec{v}=2(\vec{u}-3\vec{w})-\vec{u}$.

2.15 Dane są punkty $A=(1,3),\ B=(3,7)$ i $C=(5,8)$.
a) R Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$.
b) R Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.
c) R Znajdź taki punkt D, aby wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ były równe.
d) Znajdź taki punkt E, aby czworokąt $ACBE$ był równoległobokiem.
e) R Podaj współrzędne wektora, który jest sumą wektorów $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{HB}$, gdzie H jest środkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C.

2.16 Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Zapisz wektory $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AB}$ za pomocą wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

2.17 R Dwa punkty dzielą odcinek o końcach $A=(17,31)$ i $B=(53,58)$ na trzy równe części. Znajdź współrzędne tych punktów.

2.18 Dane są wektory $\vec{u}=[3,5]$ i $\vec{v}=[-2,6]$. Wyznacz takie liczby a i b, aby $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}=[10,5]$.

Maturzysta	• znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek (**P**)

2.19 R Dane są punkty $A = (1, 3)$ i $B = (3, 7)$.
a) Oblicz współrzędne środka odcinka AB.
b) Wyznacz współrzędne takiego punktu K, aby punkt B był środkiem odcinka AK.
c) Znajdź równanie symetralnej odcinka AB.

2.20 W Punkt $A = (-1, 5)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC, którego środkowe przecinają się w punkcie $S = (7, 12)$. Wyznacz współrzędne środka boku BC.

Maturzysta	• posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$ • **wyznacza równanie prostej stycznej do zadanego okręgu**

2.21 R Zapisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt S, a promień ma długość r, jeżeli
a) $S = (0, 3)$, $r = 5$; **b)** $S = (2, -1)$, $r = 2$.

2.22 Podaj długość promienia i współrzędne środka okręgu o równaniu
a) $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 3^2$; **b)** $x^2 + y^2 = 4$; **c)** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$.

2.23 R Dany jest okrąg o równaniu $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 13$ oraz punkty $P = (1, -3)$ i $Q = (-4, -9)$.
a) Sprawdź, czy punkty P, Q należą do danego okręgu.
b) Znajdź równanie prostej k stycznej do danego okręgu i przechodzącego przez punkt P.
c) Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie P i przechodzącego przez punkt Q.

2.24 W Prosta o równaniu $y = -x + 3$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S = (4, 5)$. Znajdź równanie tego okręgu.

2.25 Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 5$
a) **R** przechodzącej przez punkt $B = (0, 5)$;
b) **R** równoległej do prostej o równaniu $2x - y = 0$;
c) prostopadłej do prostej o równaniu $2x - y = 0$.

2.26 Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach
a) **R** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ i $(x-4)^2 + y^2 = 1$; **b)** **R** $(x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 128$ i $x^2 + y^2 = 200$;
c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ i $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$.

Maturzysta	• **rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego lub liniowego, a które nie są trudniejsze niż** $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}$. • **znajduje punkty wspólne prostej i okręgu** • **znajduje punkty wspólne dwóch okręgów**

2.27 R Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 5y = 4 \\ x^2 + y^2 + x - 7y = 0 \end{cases}$.

2.28 R Wyznacz współrzędne punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x-1{,}5)^2 + (y+2{,}5)^2 = 12{,}5$
a) i prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$; **b)** i osi układu współrzędnych.

2.29 W Wyznacz współrzędne punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$ i okręgu o równaniu
a) $x^2 + (y - 1)^2 = 18$; **b)** $(x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 64$.

2.30 R Wyznacz te wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $4x + 3y + m = 0$ ma z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ dwa punkty wspólne.

2.31 Wyznacz te wartości parametru m, dla których układ równań $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4m \end{cases}$ ma jedno rozwiązanie.

Maturzysta	• wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych)

2.32 Podaj współrzędne punktu, który jest obrazem punktu $P = (3, -2)$
a) w symetrii osiowej względem osi OY;
b) w symetrii osiowej względem osi OX;
c) w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

2.33 W Podaj równanie okręgu, który jest obrazem okręgu o równaniu $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 5$
a) w symetrii osiowej względem osi OY;
b) w symetrii osiowej względem osi OX;
c) w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

2.34 W Znajdź równanie prostej k, która jest obrazem prostej o równaniu $y = 2x - 5$
a) w symetrii osiowej względem osi OY;
b) w symetrii osiowej względem osi OX;
c) w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

ZADANIA MATURALNE

PROSTA

202. Dane są punkty: $A = (-3, -2)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, -2)$. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C.
Egzamin wstępny do szkół średnich w woj. poznańskim w roku 1993

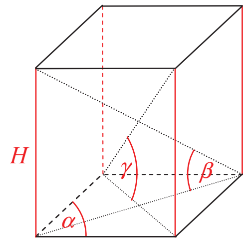
203. W Sprawdź, czy punkt $P=(5, -2)$ należy do symetralnej odcinka o końcach $A=(1, 5)$ i $B=(-3, -1)$.

204. Prosta o równaniu $y = 3x + 5$ przecina oś Oy w punkcie A, prosta o równaniu $y = \frac{2}{9}x - \frac{10}{3}$ przecina oś Ox w punkcie B, a obie proste przecinają się w punkcie C.
a) Znajdź współrzędne punktów A, B i C. **b) W** Uzasadnij, że odcinki AB i AC są prostopadłe.

205. Prosta k o równaniu $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$ jest nachylona do osi Ox pod kątem α. Prosta l przechodzi przez punkt $A = (2\sqrt{3}, 5)$ i jest nachylona do osi Ox pod kątem 2α. Znajdź równanie prostej l.

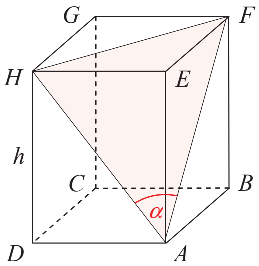
206. Dane są proste o równaniach $x - y = 0$, $3x - y - 8 = 0$, $2x + y - 12 = 0$. Uzasadnij, że istnieje taki punkt P, który należy do każdej z danych prostych.

314. R Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o obwodzie 18. Przekątne graniastosłupa mają długości 9 i $\sqrt{33}$, a krawędź boczna 4. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



315. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o kącie ostrym α. Przekątne graniastosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami β i γ ($\beta < \gamma$), a wysokość graniastosłupa ma długość H. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

316.



Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4. Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2022

317.* R Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α. Krótsza przekątna graniastosłupa ma długość d i tworzy ze ścianą boczną kąt β. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

OSTROSŁUPY

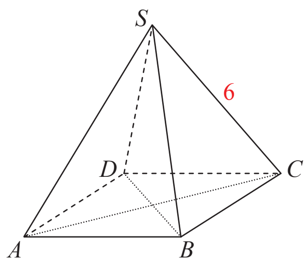
ostrosłup prawidłowy czworokątny

318. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 544 cm^2, a pole powierzchni całkowitej 800 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
Egzamin wstępny do szkół średnich w woj. siedleckim w roku 1993

319. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt o mierze $30°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

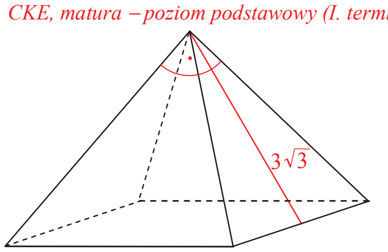
320. Każda ściana ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole 8. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

321. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat o boku $3\sqrt{2}$. Objętość tego ostrosłupa jest równa 18.
a) Znajdź miarę kąta, jaki tworzy krawędź boczna z płaszczyzną podstawy ostrosłupa.
b) Oblicz kosinus kąta, jaki tworzy ściana boczna z płaszczyzną podstawy ostrosłupa.



322. **(0 – 5)** Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, którego krawędź boczna ma długość 6 (zobacz rysunek). Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
CKE, matura – poziom podstawowy (I. termin), czerwiec 2020

323. R



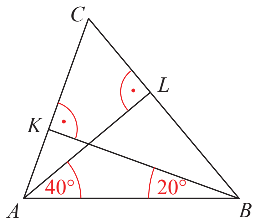
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są prostopadłe, a wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka ostrosłupa ma długość $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

8. ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA

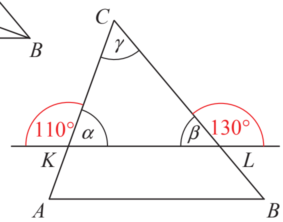
ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI I ROZWIĄZANIA DO ZADAŃ WPROWADZAJĄCYCH

PLANIMETRIA

1.1 $|\angle BAC| = 40°$, $|\angle ABC| = 20°$, $|\angle ACB| = 120°$.
Rozwiązanie. α – miara kąta BAC. Wiemy, że $|\angle ABC| = \alpha - 20°$ i $|\angle ACB| = 3\alpha$.
Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc $\alpha + \alpha - 20° + 3\alpha = 180°$. Stąd $\alpha = 40°$, zaś $|\angle ABC| = 20°$, $|\angle ACB| = 120°$.



1.2 50º, 60º, 70º.
Rozwiązanie. W trójkącie ABL: $40° + |\angle ABL| + 90° = 180°$, więc $|\angle ABL| = 50°$.
W trójkącie KAB: $|\angle KAB| + 20° + 90° = 180°$, więc $|\angle KAB| = 70°$.
W trójkącie ABC: $70° + 50° + |\angle ACB| = 180°$, więc $|\angle ACB| = 60°$.



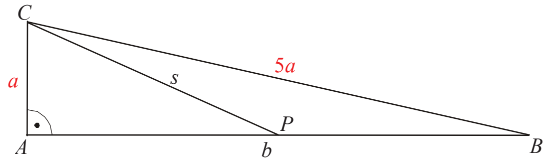
1.3 50°, 60°, 70°.
Rozwiązanie. α, β, γ – kąty trójkąta KLC (*zobacz rysunek*)
$\alpha + 110° = 180°$, więc $\alpha = 70°$. $\beta + 130° = 180°$, więc $\beta = 50°$.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, więc $\gamma = 60°$.
Kąty BAC i LKC są kątami odpowiadającymi, więc $|\angle BAC| = |\angle LKC| = \alpha = 70°$.
Kąty ABC i KLC są kątami odpowiadającymi, więc $|\angle ABC| = |\angle KLC| = \beta = 50°$.

1.4 120°, 35°, 25°.
Rozwiązanie. Kąty APB i CPD są kątami w i e r z c h o ł k o w y m i, więc $|\angle CPD| = |\angle APB| = 120°$.
Kąty BAP i PCD są kątami n a p r z e m i a n l e g ł y m i, więc $|\angle PCD| = |\angle BAP| = 35°$. $|\angle PDC| = 180° - (120° + 35°) = 25°$.

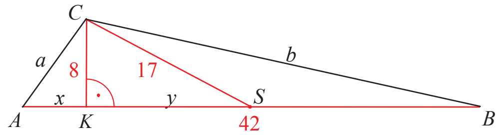
1.5 **a)** Tak; **b)** nie; **c)** nie; **d)** tak.

1.6 $a \in (1, 5)$.
Rozwiązanie. Jeżeli a jest największą długością spośród 2, 3, a, czyli $a \geq 3$, to musi zachodzić nierówność $a < 2 + 3$. Zatem $a \in [3, 5)$.
Jeżeli największą długością spośród 2, 3, a jest odcinek o długości 3, to wtedy $a \leq 3$ i $3 < 2 + a$. Zatem $a \in (1, 3]$.
Trójkąt możemy zbudować wtedy, gdy $a \in [3, 5)$ lub $a \in (1, 3]$, czyli wtedy, gdy $a \in (1, 5)$.

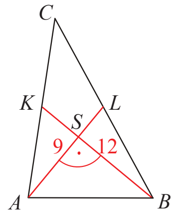
1.7 $a\sqrt{7}$.
Rozwiązanie. a – długość jednej przyprostokątnej, $5a$ – długość przeciwprostokątnej, b – długość drugiej przyprostokątnej,
s – długość środkowej poprowadzonej do dłuższej przyprostokątnej.
Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta ABC mamy $a^2 + b^2 = (5a)^2$.
Stąd $b^2 = 25a^2 - a^2 = 24a^2$, więc $b = \sqrt{24a^2} = \sqrt{4 \cdot 6}a = 2\sqrt{6}a$.
$|AP| = 0{,}5b = \sqrt{6}a$. Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta APC mamy
$s^2 = a^2 + (\sqrt{6}a)^2$. Stąd otrzymujemy $s = \sqrt{7}a$.



1.8 10, $4\sqrt{85}$.
Rozwiązanie. Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta KSC $8^2 + y^2 = 17^2$, stąd $y = 15$.
Punkt S jest środkiem boku AB, więc $x = 21 - y = 6$.
Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta AKC obliczmy $a = 10$.
Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta KBC obliczmy $b = 4\sqrt{85}$.



1.9 $|AB| = 10$, $|AC| = 4\sqrt{13}$.
Rozwiązanie. Z *tw. o środkowych trójkąta*: $|AS| = \frac{2}{3} \cdot |AL| = 6$, $|BS| = \frac{2}{3} \cdot |BK| = 8$, $|SK| = \frac{1}{3} \cdot |BK| = 4$.
Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta ABS: $|AB|^2 = 6^2 + 8^2$. Stąd $|AB| = 10$.
Z *tw. Pitagorasa* dla trójkąta ASK: $|AK|^2 = 6^2 + 4^2$. Stąd $|AK| = 2\sqrt{13}$. $|AC| = 2 \cdot |AK| = 4\sqrt{13}$.



245. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.
Wskazówka. Poprowadź wysokość trójkąta z wierzchołka C, a następnie oblicz tangens kąta BAC i tangens kąta ABC.

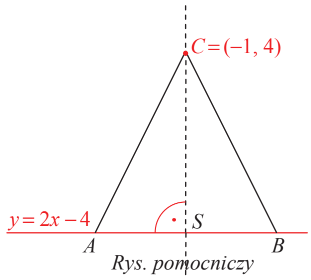
246. $(5, -3)$ i $(2, 3)$.

247. $C = (-2, 5)$.
Wskazówka. Prosta BC jest prostopadła do prostej AD, prosta AC jest prostopadła do prostej BD.

248. $5x - 3y = 0$ lub $x - 4 = 0$.

249. $C = (0, 27)$, $9\sqrt{10} + 50$.
Wskazówki. **I.** $C = (0, c)$. **II.** Długości odcinków AC i BC są równe.

250.
Rozwiązanie. ***Szkic rozwiązania.***
CS – wysokość trójkąta ABC
Znajdujemy równanie prostej CS: $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$.
Wyznaczany współrzędne punktu S: $S = (3, 2)$.
Obliczamy długość wysokości CS: $|CS| = 2\sqrt{5}$.
Punkty A, B należą do prostej $y = 2x - 4$, więc ich współrzędne można zapisać w postaci $(x, 2x - 4)$.
$|AB| = |CS|$, więc $|AS| = |SB| = \sqrt{5}$. Zatem $\sqrt{(x-3)^2 + (2x-4\ -\ 2)^2} = \sqrt{5}$.
Rozwiązaniami równania $(x - 3)^2 + (2x - 6)^2 = 5$ są liczby 2 i 4.
Jeśli $x = 2$, to $y = 0$, a jeśli $x = 4$, to $y = 4$, więc końce podstawy mają współrzędne: $(2, 0)$ i $(4, 4)$.

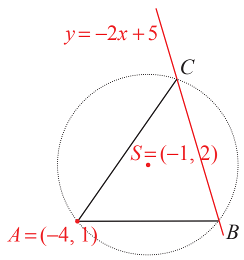


Rys. pomocniczy

251. $(x - \frac{7}{5})^2 + (y + \frac{1}{5})^2 = \frac{9}{5}$.

252. $x - 2y + 4 = 0$.
Wskazówka. Wykonaj rysunek. Poprowadź prostą równoległą do boku AB przechodzącą przez punkt P.

253. $(0, 5)$, $(2, 1)$.
Rozwiązanie. Wierzchołki B i C należą do prostej o równaniu $y = -2x + 5$, więc są to punkty o współrzędnych $(x, -2x + 5)$. Odległość punktów B i C od punktu S jest równa długości promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC, więc jest równa $|SA|$.
$|SA| = \sqrt{[-4-(-1)]^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
$|SB| = |SC| = \sqrt{[x-(-1)]^2 + [(-2x+5)\ -2]^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (-2x+3)^2} = \sqrt{5x^2 - 10x + 10}$.
Równość $\sqrt{5x^2 - 10x + 10} = \sqrt{10}$ sprowadzamy do postaci $5x^2 - 10x = 0$. Stąd $x = 0$ lub $x = 2$.
Zatem pozostałe wierzchołki trójkąta mają współrzędne $(0, -2 \cdot 0 + 5)$ oraz $(2, -2 \cdot 2 + 5)$, czyli $(0, 5)$ oraz $(2, 1)$.



Rys. pomocniczy

254. $C = (0, 3)$ lub $C = (12, 15)$.
Rozwiązanie. Pole trójkąta ABC: $P = 0{,}5 \cdot |AB| \cdot d$, gdzie d jest odległością punktu C od prostej AB.
Długość odcinka AB jest równa $2\sqrt{5}$. Równanie prostej AB: $2x - y - 3 = 0$.
Punkt C należy do prostej k, więc $C = (p, p + 3)$, gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą.
Odległość punktu C od prostej k: $d = \frac{|2p-(p+3)-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|p-6|}{\sqrt{5}}$.
Pole trójkąta jest równe 6, więc $0{,}5 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|p-6|}{\sqrt{5}} = 6$. Stąd $p = 0$ lub $p = 12$. Zatem $C = (0, 3)$ lub $C = (12, 15)$.

255. $y = -x + 4$, $y = 1$ lub $y = -x + 4$, $x = 3$.
Wskazówka. ABC – rozważany trójkąt. Jeśli punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego trójkąta ABC, to punkt B jest punktem wspólnym prostej o równaniu $x - y + 1 = 0$ i okręgu o środku w punkcie C i promieniu długości $|AC|$.

256. $(\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$, $(-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5})$.