SPIS TREŚCI

Niniejsza książka powstała po dokonaniu wnikliwej analizy tego, co w kontekście egzaminu maturalnego z matematyki dla ucznia i nauczyciela jest najważniejsze, czyli *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej dla liceum ogólnokształcącego i technikum oraz *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej dla szkoły podstawowej.

Zbiór zadań wydany został w dwóch tomach. Każdy z rozdziałów 1. – 11. w tomie I składa się z trzech części:

1. **CZĘŚĆ TEORETYCZNA** zawiera niektóre definicje oraz wszystkie te wzory i twierdzenia, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań maturalnych. Niektóre definicje i twierdzenia zostały opatrzone przykładami.
2. **ZADANIA WPROWADZAJĄCE** to seria starannie dobranych prostych rachunkowo zadań, odnoszących się do poszczególnych *wymagań szczegółowych* z podstawy programowej.
   Analiza tych zadań da uczniowi pewność, że nie pominął w przygotowaniach do matury żadnego zagadnienia, które może pojawić się na egzaminie maturalnym.
   Aby ułatwić maturzyście samodzielne przygotowanie do egzaminu, do większości *zadań wprowadzających* podano rozwiązania lub wskazówki.
   Poważne podejście do zadań z tej części rozdziału jest podstawą, a zarazem gwarancją sukcesu na egzaminie maturalnym.
3. **ZADANIA MATURALNE** to zadania otwarte o zróżnicowanej skali trudności. Zadania otwarte to forma zadań, której maturzysta powinien poświęcić najwięcej uwagi. Przykłady innych zadań zamieszczono w rozdziale 12.
   Aby ułatwić korzystanie ze zbioru, ta część rozdziału została podzielona na podrozdziały i sekcje.

Cechą charakterystyczną zbioru jest taki układ zadań, który od ucznia rozwiązującego zadania z danego działu, nie wymaga znajomości zagadnień z działów następnych. Jest to duże udogodnienie, szczególnie dla tych maturzystów, którzy mają poważne braki w wymaganej wiedzy.

Mamy nadzieję, że pozycja ta zainteresuje również tych uczniów klas niematuralnych, którzy już myślą o egzaminie maturalnym z matematyki.

Tom II książki składa się z rozdziałów:

1. *Planimetria*
2. *Geometria analityczna*
3. *Stereometria*
4. *Pochodna funkcji*
5. *Zadania optymalizacyjne*
6. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*
7. *Poziom podstawowy - dodatek*
8. *Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania*

PRZYJĘTE W KSIĄŻCE OZNACZENIA

Oznaczenia w części teoretycznej:

➩ – wiedza teoretyczna obowiązująca na obu poziomach

➩ – wiedza teoretyczna obowiązująca tylko na poziomie rozszerzonym

Oznaczenia szczegółowych wymagań egzaminacyjnych:

(**P**) – *wymaganie szczegółowe* zawarte w podstawie programowej dla szkoły podstawowej

(**A**) – *wymaganie szczegółowe* dodane przez autora

wymaganie szczegółowe bez oznaczeń – wymaganie zawarte w podstawie programowej dla LO i technikum

Wymagania szczegółowe odnoszące się do poziomu rozszerzonego wyróżnione zostały **wytłuszczoną czcionką w kolorze czerwonym**.

Oznaczenia przy zadaniach:

W – do zadania podano wskazówkę

R – do zadania podano rozwiązanie

* – zadanie o podwyższonej skali trudności

Zadania i podpunkty zadań przeznaczonych dla zdających matematykę także na poziomie rozszerzonym wyróżnione zostały **kolorem czerwonym**.

Np. **599.* R** – trudne zadanie dla poziomu rozszerzonego z rozwiązaniem.

NIEKTÓRE SYMBOLE (OZNACZENIA) MATEMATYCZNE

Symbol (oznaczenie)	Czytamy
$x \in A$	element x należy do zbioru A
$x \notin A$	element x nie należy do zbioru A
$\wedge$	i
$\vee$	lub
$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A - B$ lub $A \setminus B$	różnica zbiorów A i B
$(a;\, b)$	przedział otwarty o końcach a i b
$[a;\, b]$ lub $\langle a;\, b\rangle$	przedział domknięty o końcach a i b
$f: A \rightarrow B$	funkcja f ze zbioru A w zbiór B (*czyli funkcja, której dziedziną jest zbiór A, a wartości należą do zbioru B*)

6. WIELOMIANY

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

RÓWNOŚĆ WIELOMIANÓW

⇨ Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

RESZTA Z DZIELENIA WIELOMIANU PRZEZ DWUMIAN $x-a$

⇨ Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ jest równa $W(a)$.

PIERWIASTEK WIELOMIANU

⇨ Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$.

⇨ Wielomian $W(x)$ stopnia n, który ma n pierwiastków: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, można zapisać w postaci $W(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, gdzie a jest liczbą.

Np. jeżeli liczby -3, 1, 7 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=5x^3+bx^2+cx+d$, to wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci $W(x)=5(x+3)(x-1)(x-7)$.

TWIERDZENIE BÉZOUT

⇨ Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

CAŁKOWITE PIERWIASTKI WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH

⇨ Niech $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ będą liczbami całkowitymi i $a_n \neq 0$.
Jeśli równanie $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ma pierwiastek **całkowity** c, to c jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Maturzysta	• rozpoznaje wielomian jednej zmiennej i określa jego stopień (A)

6.1 Czy wyrażenie $W(x)$ jest wielomianem? Jeśli $W(x)$ jest wielomianem, to określ jego stopień.

a) $W(x)=3x-5$; **b)** $W(x)=\sqrt{3}$; **c)** $W(x)=\sqrt{x}$; **d)** $W(x)=10x^{10}+5x^5+1$; **e)** $W(x)=(\pi x+0{,}1)^5$;
f) $W(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)^3$; **g)** $W(x)=x^3\cdot(x+1)+x^2\cdot(1-x-x^2)$; **h)** $W(x)=(x^3+x+1)^{-1}$.

Maturzysta	• rozpoznaje wielomiany równe (A)

6.2 Rozstrzygnij, czy wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ są równe

a) **R** $P(x)=x^3-4x$, $Q(x)=x(x-2)(x+2)$; **b)** $P(x)=x^4+x^2+1$, $Q(x)=x^4+x^3+1$;
c) $P(x)=x^3+2x(x^2+x-1)$, $Q(x)=3x^3+2x^2-2x$; **d)** $P(x)=x^3+x^2-x-1$, $Q(x)=(x+1)(x-1)^2$.

6.3 R Znajdź współczynniki b, c, d wiedząc, że wielomiany $W(x)=x^3+bx^2+cx+d$ i $Q(x)=(x+2)^2(x+1)$ są równe.

6.4 Wyznacz parametry a, b, c tak, aby wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ były równe

a) $P(x)=2x^3+ax^2+5x+b+c$ i $Q(x)=(b-3)x^3+ax^2+(2a+c)x+4$;
b) $P(x)=ax^3-4x^2+5x-2$ i $Q(x)=(x-b)^2(x-c)$.

Maturzysta	• sprawdza, czy liczba jest pierwiastkiem wielomianu (A)

6.5 R Znajdź współczynnik a wielomianu $W(x) = ax^3 - 2x^2 - 8x - 12$ wiedząc, że 3 jest jego pierwiastkiem.

6.6 R Liczby -2 i 1 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 + x^3 - x^2 + dx + e$. Wyznacz wartości współczynników d i e.

Maturzysta	• **dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$** • **stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$** (A) • **stosuje twierdzenie Bézouta** (A)

6.7 Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$

a) $W(x) = x^2 - 10x + 21, \quad P(x) = x - 7;$

b) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \quad P(x) = x - 2;$

c) $W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \quad P(x) = x + 2;$

d) $W(x) = x^3 - 5x + 4, \quad P(x) = x + 1;$

e) $W(x) = x^2 + 10x + 21, \quad P(x) = 2x + 1;$

f) $W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \quad P(x) = -2x - 3.$

6.8 Nie wykonując dzielenia, zbadaj, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, jeśli

a) R $W(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2, \quad P(x) = x - 2;$

b) $W(x) = x^{20} + x^{15} - 2, \quad P(x) = x + 1.$

6.9 R Znajdź współczynnik b wiedząc, że wielomian $W(x) = x^3 + bx^2 + 6x + 4$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$.

6.10 R Znajdź wielomian $W(x)$, jeżeli

a) $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x) = x - 1$, a wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

b) w wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = 3x + 5$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = x^3 + 2x$ i resztę $R(x) = 3$.

6.11 R Nie wykonując dzielenia, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeśli

a) $W(x) = x^6 + 2x^5 + 3x + 4$ i $P(x) = x - 1;$

b) $W(x) = x^6 + 3x^5 + 3x + 4$ i $P(x) = x + 3.$

6.12 Znajdź współczynnik c wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 7x + 5$ przez wielomian $P(x) = x + 1$ jest równa 5?

Maturzysta	• **znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych**

6.13 R Wielomian $W(x) = 2x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 5$, gdzie b, c, d są liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami całkowitymi ujemnymi. Podaj te pierwiastki.

6.14 Znajdź wszystkie pierwiastki całkowite wielomianu $W(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$

ZADANIA MATURALNE

DZIAŁANIA NA WIELOMIANACH. PIERWIASTEK WIELOMIANU

297. Wielomian $W(x)$ jest sumą wielomianów
$P(x)=x^6-x^5-3x^4+2x^3-5x+3$ i $Q(x)=-x^6+3x^5+5x^4-2x^3-3x-11$.
a) Określ stopień wielomianów $P(x)$ i $W(x)$.
b) R Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$.

298. R Dany jest wielomian $W(x)=x^4+10x^3-90x-81$.
a) Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki liniowe.
b) Uzasadnij, że dla liczb większych od π wielomian $W(x)$ przyjmuje dodatnie wartości.

299. W Rozłóż na czynniki liniowe wielomian $W(x)=(x^2+4x-1)^2-16$ i podaj jego pierwiastki.

300. R Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)=x^3-bx^2-3x+c$ jest 3. Znajdź pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$ wiedząc, że $W(-2)=-5$.

301. R Jednym z rozwiązań równania $x^4+11x^2+dx+30=5x^3$ jest 3. Znajdź pozostałe rozwiązania tego równania.

302. R Wyznacz współczynniki wielomianu $P(x)=ax+b$ wiedząc, że iloczyn wielomianów $P(x)$ i $Q(x)=x^2-2x+2$ jest wielomianem $W(x)=3x^3-2x^2-2x+8$.

303. **(0 – 2)** Wynikiem dzielenia wielomianu $5x^3-7x^2-4x-4$ przez dwumian $x-2$ jest trójmian kwadratowy postaci ax^2+bx+c. Wyznacz wartości współczynników a, b oraz c.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2021

304. Przedstaw wielomian $W(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2007

305. Trójmian $T(x)$ jest wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)=2x^3-2x^2-5x+2$ przez dwumian $x-2$. Zapisz $T(x)$ jako iloczyn dwóch wielomianów pierwszego stopnia.

306. Znajdź wszystkie wielomiany postaci $x-b$, przez które podzielny jest wielomian $W(x)=9x^5-9x^4-4x+4$.

307. Wielomian $W(x)=ax^3+bx^2-9x-10$ jest podzielny przez dwumian $x-2$ i przez dwumian $x+1$.
a) Znajdź współczynniki a i b.
b) Oblicz odwrotność sumy kwadratów wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$.

308. R Wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)=x^3-3x^2+ax+b$ są liczbami całkowitymi. Znajdź współczynniki a i b wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-\sqrt{5}$.

309. R Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-p$ i przez dwumian $x-q$. Wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $x-p$ jest wielomian $P(x)=-x^2+10x-16$, a dzieląc $W(x)$ przez $x-q$ otrzymamy wielomian $Q(x)=-x^2+52x-100$. Oblicz $W(49)$.

310. R Dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x-2009$ otrzymamy iloraz $Q(x)=x^5-2010x^4+2000$ i resztę $R(x)=2000$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-2010$.

311. **(0 – 4)** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=4x^3-6x^2-(5m+1)x-2m$ przez dwumian $x+2$ jest równa -30. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2022

312. W Wielomian trzeciego stopnia $W(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x-11$, $x-13$, $x-15$, a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-10$ jest równa 60. Oblicz $W(14)$.

313. **(0 – 5)** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=6x^3+(m+4)x^2-2x-1$ przez dwumian $x-m$ jest równa 8. Oblicz wartość m oraz pierwiastki tego wielomianu.
CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2014

314. **(0 – 6)** Wielomian określony wzorem $W(x)=2x^3+(m^3+2)x^2-11x-2(2m+1)$ jest podzielny przez dwumian $x-2$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $x+1$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x)\leq 0$.
CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2019

315. Dany jest wielomian $W(x)=(x^2+8x+15)^{2025}+(x^2+6x+5)^{2026}$.
a) Sprawdź, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)=x+5$.
b) Uzasadnij, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$ jest równa $4\cdot 3^{2025}$.

316. R Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x+1$, a wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $x+1$ jest wielomian $Q(x)$. Natomiast dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x-2$ otrzymujemy iloraz $Q(x)+6x-3$ i resztę 3. Wyznacz wielomian $W(x)$.

CAŁKOWITE PIERWIASTKI WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH

317. Wielomian $W(x)=x^4+4x^3+cx^2+dx+1$, gdzie $c, d\in \mathbf{Z}$, ma dwa różne pierwiastki całkowite. Znajdź niewymierne pierwiastki tego wielomianu.

318. R Liczby pierwsze p i q $(p\neq q)$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)=2x^3+bx^2+cx-10$, gdzie b, c są liczbami całkowitymi. Zapisz wielomian $W(x)$ jako iloczyn trzech wielomianów stopnia pierwszego.

319. R Dany jest wielomian $W(x)=x^3+4x+p$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Znajdź p wiedząc, że $W(x)$ ma pierwiastek całkowity.

9.13 W Rozstrzygnij, czy funkcje f i g są równe.

a) $f(x)=\log_3(x-2)+\log_3(x-3)$ i $g(x)=\log_3[(x-2)(x-3)]$;

b) $f(x)=\log(x-2)-\log(x-3)$ i $g(x)=\log\frac{x-2}{x-3}$;

c) $f(x)=\log(x-2)-\log(3-x)$ i $g(x)=\log\frac{x-2}{3-x}$;

d) $f(x)=\log x^2$ i $g(x)=2\log x$;

e) $f(x)=\log x^2$ i $g(x)=2\log|x|$.

9.14 R Przekształcając wykres funkcji $f(x)=\log_2 x$, naszkicuj wykres funkcji

a) $g(x)=\log_2(-x)$;

b) $h(x)=\log_2(2-x)$;

c) $k(x)=\log_2\frac{1}{x}$;

ZADANIA MATURALNE

LOGARYTM

413. R Która z liczb $\log_7 7\sqrt{7}$, $\log_{32} 8$, $\log_3 \sqrt[3]{9}$ jest najmniejsza, a która największa?

414. R O ile procent liczba $\log 8$ jest mniejsza od liczby $\log^2 4+\log 25\cdot\log 4$?

415. O ile procent liczba $2^{2\sqrt{3}+\log_2 7}$ jest większa od liczby $4^{\sqrt{3}+1}$?

416. R Rozstrzygnij, które z liczb $a=\log_4\sqrt{5}\cdot\log_{25}8$, $b=\log 2\cdot\log 50+\log^2 5$, $c=(\log_3 36)^2-\log_3 16\cdot\log_3 18$ są liczbami całkowitymi.

417. Uzasadnij, że liczby $a=\log_7 2\cdot\log 7+\log 50$, $b=\frac{\log_2 36\cdot\log_3 36}{\log_2 36+\log_3 36}$, $c=\frac{\log^3 4+\log^3 25}{4\cdot(\log^2 2-\log 2\cdot\log 5+\log^2 5)}$ są równe.

418. R Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a spełniające równość $\log_{1-2a}(a+7)=2$.

419. Oblicz wartość wyrażenia $\log_a\sqrt{ab}$ wiedząc, że $\log_a b=5$, gdzie a, b są liczbami dodatnimi i $a\neq 1$.

420. Oblicz wartość wyrażenia $\log ab$ wiedząc, że $\log 10a=2010$ i $\log\frac{10}{b}=1020$.

421. Oblicz $\log_{a^2}\frac{1}{b}$ wiedząc, że $\log_a b=\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami dodatnimi i $a\neq 1$.

422. Oblicz $\log_{abc} p$ wiedząc, że $\log_a p=2$, $\log_b p=3$, $\log_c p=6$ i $abc\neq 1$.

478. R Udowodnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

479. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\right)\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, gdzie $0° < \alpha < 90°$.

Egzamin wstępny do szkół średnich w woj. zamojskim w roku 1992

480. R Kąt α jest kątem ostrym, jaki tworzy prosta o równaniu $y = 2x + 5$ z osią OX. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

481. R Sinus kąta ostrego α jest równy $0{,}3\sqrt{11}$. Oblicz wartość wyrażenia $\log(\sin\alpha + \cos\alpha) - \log(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)$.

482. Wiedząc, że $\sin(6\pi + \alpha) > 0$ i $\cos(\pi + \alpha) = \frac{5}{13}$, oblicz $\mathrm{tg}\,\alpha$.

483. R T w i e r d z e n i e. *Dla każdej liczby rzeczywistej α zachodzi równość* $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.
Wykorzystując podane twierdzenie, wykaż, że liczba $\sin 10°$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 8x^3 - 6x + 1$.

484. **(0 – 2)** Kąt α jest ostry i zachodzi równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2017

485. **(0 – 5)** Kąt α jest taki, że $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$.

CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2012

486. Sprawdź, czy równość $\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \cos 2x$ jest tożsamością trygonometryczną.

487. **(0 – 3)** Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1+\cos^2 2\alpha}{2}$.

CKE, matura – poziom rozszerzony, czerwiec 2013

488. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\cos 2\alpha + 8\sin^2\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ nie zależy od wartości zmiennej α.

489. **(0 – 3)** Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha$.

CKE, „Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015”

490. Udowodnić tożsamość $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$.

Egzamin wstępny na Politechnikę Wrocławską (Wydział Łączności) w roku 1959

12. POZIOM PODSTAWOWY - DODATEK

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI ALGEBRAICZNE

694. Dodatnie liczby x i y spełniają warunek $2x = 3y$. Wynika stąd, że wartość wyrażenia $\frac{x^2+y^2}{x\cdot y}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{13}{6}$ **C.** $\frac{6}{13}$ **D.** $\frac{3}{2}$

CKE, matura – poziom podstawowy, maj 2022

695. Dane jest równanie $x^{16} + 5x^{15} + x^2 + 6x + 5 = 0$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Nie istnieje liczba dodatnia, która jest pierwiastkiem danego równania.	**P**	**F**
2.	Liczba -5 jest rozwiązaniem danego równania.	**P**	**F**

696. Wartość wyrażenia $x^2 - 6x + 9$ dla $x = \sqrt{3} + 3$ jest równa

A. 1 **B.** 3 **C.** $1 + 2\sqrt{3}$ **D.** $1 - 2\sqrt{3}$

CKE, matura – poziom podstawowy, czerwiec 2020

697. Liczby $p = 3 - 2\sqrt{2}$ i $q = 3 + 2\sqrt{2}$ są rozwiązaniami równania $x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 30x + 5 = 0$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	$p^4 - 6p^3 + 6p^2 - 30p + 5 = 0$.	**P**	**F**
2.	$q^4 - 6q^3 + 6q^2 - 30q + 5 > 0$.	**P**	**F**

LICZBY RZECZYWISTE

698. Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru **R** liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ są niewymierne.
Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Liczba x jest wymierna dla

A. $a = 5$ **B.** $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ **C.** $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0{,}3$ **D.** $a = 6$

E. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$ **F.** $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$ **G.** $a = -\sqrt{6}$

CKE, Informator o egzaminie maturalnym z matematyki (poziom podstawowy) od roku szkolnego 2022/2023

699. **Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.**
Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(n + 2025)(n + 2026)(n + 2027)$ jest podzielna

A.	przez 4,	ponieważ wśród liczb $n + 2025,\ n + 2026,\ n + 2027$	**1.**	jest liczba podzielna przez 4.
			2.	jest liczba podzielna przez 2 i jest liczba podzielna przez 3.
B.	przez 6,		**3.**	jest liczba podzielna przez 6.

1.11 **a)** $W(x)=(x-1)^2(x+4)$; **b)** $(x+2)(3x^2+3x+1)$.
Rozwiązanie. **a)** Jeśli wielomian $W(x)$ ma pierwiastek wymierny, to na mocy *tw. o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych*, jest to liczba całkowita (bo współczynnik przy x^3 jest równy 1) i jest to dzielnik liczby 4. Szukamy więc pierwiastków wielomianu wśród liczb $1, -1, 2, -2$. $W(1)=0$, zatem na mocy *tw. Bézout* $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-1$. Wynikiem dzielenia $W(x)$ przez $x-1$ jest wielomian $Q(x)=x^2+3x-4$, więc $W(x)=(x-1)(x^2+3x-4)$. Pierwiastkami wielomianu $Q(x)$ są liczby -4 i 1, więc $W(x)=(x-1)(x+4)(x-1)$.

1.12 **a)** $(3; +\infty)$; **b)** $(-\infty; 2]$; **c)** $(\frac{1}{10}; 5)$; **d)** $(-\infty; -2)\cup[4; +\infty)$; **e)** $(-\infty; 6)$; **f)** $(-\infty; 3]$; **g)** $(-\infty; +\infty)$;
h) nie istnieją liczby spełniające podane warunki.

1.13 **a)** $m\in(-\infty; 0{,}8]$; **b)** $m\in(0{,}2; 0{,}6)$; **c)** $m\in[0{,}6; 3]$.
Rozwiązanie. **b)** $5m-2\in(-1; 1)$, jeśli $5m-2>-1$ i $5m-2<1$. Stąd otrzymujemy $m>0{,}2$ i $m<0{,}6$, czyli $m\in(0{,}2; 0{,}6)$.

1.14 **a)** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; **b)** $(1; 6]$; **c)** $\mathbf{R}$; **d)** $\mathbf{Z}$. **1.15** **a)** $\{2, 4\}$; **b)** $[2; 5)$; **c)** $\{2\}$; **d)** $[-2; -1)\cup(1; 2]$; **e)** $(3; +\infty)$.

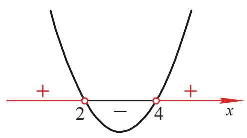
1.16 **a)** $A\setminus B=\{1, 3, 5\}, B\setminus A=\{0, 6\}$; **b)** $A\setminus B=(1; 2), B\setminus A=[5; 6]$; **c)** $A\setminus B=(-\infty; 2), B\setminus A=(2; +\infty)$; **d)** $A\setminus B=(-\infty; 1]\cup\{4\}, B\setminus A=\varnothing$.

1.17 **a)** $x=-1$; **b)** $x=7$; **c)** $y=7$; **d)** $x=\sqrt{3}$; **e)** równanie nie ma rozwiązań; **f)** rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista.
Rozwiązanie. **b)** Mnożąc obie strony równania przez 2, otrzymujemy równanie $2x-(x-3)=4x-18$. Stąd mamy $-3x=-15$ i ostatecznie $x=5$.
d) $x\sqrt{3}-x=3-\sqrt{3}$, wyłączamy x przed nawias $x(\sqrt{3}-1)=3-\sqrt{3}$, dzieląc obie strony równania przez $\sqrt{3}-1$, otrzymujemy $x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}$. **f)** Po wymnożeniu, otrzymujemy $4x+4=x^2+4x-x^2+4$. Po redukcji wyrażenia x^2, otrzymujemy równość $4x+4=4x+4$ i widzimy, że dla każdej liczby rzeczywistej x lewa strona równania jest równa prawej.

1.18 **a)** $x\in(3; +\infty)$; **b)** $x\in(-\infty; 5)$; **c)** nierówność spełnia każda liczba rzeczywista; **d)** $x\in(2\sqrt{3}+\sqrt{6}; +\infty)$.
Rozwiązanie. **d)** $x\sqrt{2}-2x<-2\sqrt{3}$, wyłączamy x przed nawias: $x(\sqrt{2}-2)<-2\sqrt{3}$, dzielimy obie strony nierówności przez $\sqrt{2}-2$ ($\sqrt{2}-2$ jest liczbą ujemną, więc zmieniamy znak nierówności): $x>\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2}$, liczbę $\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2}$ zapiszemy w nieco prostszej postaci:
$\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2}=\dfrac{-2\sqrt{3}(2+\sqrt{2})}{-2}=\sqrt{3}(2+\sqrt{2})$. Zatem $x>2\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

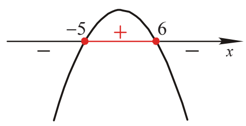
1.19 **a)** $x=-6\vee x=5$; **b)** $x=-3\vee x=3$; **c)** $m=-\sqrt{2}\vee m=\sqrt{2}$; **d)** równanie nie ma rozwiązań; **e)** $a=0\vee a=8$; **f)** $x=2\vee x=5$;
g) $x=-0{,}5$; **h)** $x=-4\vee x=2$; **i)** $k=-0{,}5\vee k=1$; **j)** $x=1-\sqrt{3}\vee x=1+\sqrt{3}$.
Rozwiązanie. **a)** $x-5=0$ lub $x+6=0$, stąd $x=5$ lub $x=-6$; **d)** $x^2+4>0$ dla każdej liczby $x\in\mathbf{R}$ (bo $x^2\geq 0$), więc równanie nie ma rozwiązań; **e)** $a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$, stąd $a=0$ lub $a=8$; **f)** $x(x-2)-5(x-2)=0$, czynnik $x-2$ wyłączamy przed nawias: $(x-2)(x-5)=0$, stąd $x=2$ lub $x=5$;
g) $12x^2+12x+3=0\,|:3$, $4x^2+4x+1=0$, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy, otrzymujemy $(2x+1)^2=0$. Zatem $2x+1=0$, stąd $x=-0{,}5$;
h) $x^2+2x-8=0$, $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=36$, $\sqrt{\Delta}=6$, $x_1=\dfrac{-2-6}{2}=-4$ $x_2=\dfrac{-2+6}{2}=2$;
i) $2k^2-k-1=0$, $\Delta=9$, $k_1=\dfrac{1-3}{2\cdot2}=-\dfrac{1}{2}$ $k_2=\dfrac{1+3}{2\cdot2}=1$;
j) $x^2-2x-2=0$, $\Delta=12$, $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$, $x_1=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{2}=1-\sqrt{3}$ $x_2=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{2}=1+\sqrt{3}$.

1.20 **a)** $x\in(-\infty; 2)\cup(4; +\infty)$; **b)** $x\in[-5; 6]$; **c)** $y\in(-6; 6)$; **d)** $x\in(-\infty; -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2}; +\infty)$;
e) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$; **f)** $m\in\mathbf{R}$; **g)** $x\in[0; 7]$; **h)** $x\in(-4; -1)$; **i)** $x\in(-\infty; 1]\cup[4; +\infty)$;
j) $x\in(3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10})$; **k)** $k\in\mathbf{R}$; **l)** $p=-3$; **m)** $x\in\mathbf{R}$; **n)** $x\in\mathbf{R}\setminus\{\sqrt{6}\}$.

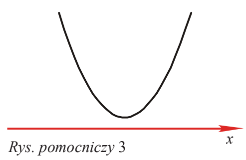


Rys. pomocniczy 1

Rozwiązanie.
a) Znajdujemy pierwiastki wielomianu $(x-2)(x-4)$: $x-2=0$ lub $x-4=0$, stąd $x=2$ lub $x=4$. Rysujemy „uproszczony wykres” funkcji $f(x)=(x-2)(x-4)$.
Uwaga. *Gdybyśmy sprowadzili wzór funkcji f do postaci ogólnej, czyli* $f(x)=x^2-6x+8$, *to widzimy, że współczynnik przy* x^2 *jest dodatni. Zatem ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f, są skierowane do góry.*
Odczytujemy z wykresu te x, dla których $f(x)>0$: $x\in(-\infty; 2)\cup(4; +\infty)$.
b) Pierwiastki wielomianu $(x+5)(6-x)$: $x_1=-5$, $x_2=6$. Korzystając z „uproszczonego wykresu” funkcji $f(x)=(x+5)(6-x)$, odczytujemy rozwiązania nierówności: $x\in[-5; 6]$.
k) Trójmian k^2-2k+3 nie ma pierwiastków ($\Delta<0$). Korzystając z „uproszczonego wykresu” funkcji $f(k)=k^2-2k+3$ widzimy, że dla każdej liczby rzeczywistej k zachodzi nierówność $k^2-2k+3>0$.



Rys. pomocniczy 2



Rys. pomocniczy 3

178. **a)** $F=\frac{9}{5}C+32$; **b)** 37,8° C; **c)** 22,5° F; **d)** −40°C.

Wskazówka. Zależność między temperaturą F wyrażoną w stopniach Fahrenheita, a temperaturą C wyrażoną w stopniach Celsjusza jest zależnością liniową, więc $F=aC+b$ oraz $C=cF+d$, gdzie a, b, c, d są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

FUNKCJA KWADRATOWA

179. **a)** $x\in[-3;\,2]$; **b)** f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\,-0{,}5]$, f jest malejąca w przedziale $[-0{,}5;\,+\infty)$.

Wskazówki. Ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f, są skierowane do dołu.

a) Wzór funkcji f podany jest w postaci iloczynowej, więc znamy miejsca zerowe funkcji.

b) Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa średniej arytmetycznej miejsc zerowych funkcji f.

180. **a)** 4, 5, . . . , 9; **b)** $f(x)=(x-\pi)(x-3\pi)$; **c)** najmniejsza wartość: $-\pi^2$, największa: $8\pi^2$.

181. **a)** Zbiór wartości: $(-\infty;\,-2]$; **b)** funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\,8]$, a malejąca w przedziale $[8;\,+\infty)$; **c)** $g(x)=-2(x-8)^2-2$.

Rozwiązanie. **a)** Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty;\,0]$. Wykres funkcji f przesunięto o 2 jednostki do dołu, więc zbiorem wartości funkcji g jest $(-\infty;\,-2]$. **b)** Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\,0]$ i malejąca w przedziale $[0;\,+\infty)$. Wykres funkcji f przesunięto o 8 jednostek w prawo, więc funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty;\,8]$ i malejąca w przedziale $[8;\,+\infty)$.
c) $g(x)=f(x-8)-2$, zatem $g(x)=-2(x-8)^2-2$.

182. $\vec{v}=[-1,\,-12]$.

Rozwiązanie. Jeśli wykres funkcji $g(x)=ax^2+bx+c$ jest obrazem wykresu funkcji $f(x)=3x^2$ w przesunięciu o wektor $\vec{v}$, to $a=3$. Zapisujemy wzór funkcji g w postaci iloczynowej: $g(x)=3(x+3)(x-1)$, a następnie w postaci kanonicznej: $g(x)=3(x+1)^2-12$. Współrzędne wektora $\vec{v}$ odczytujemy z postaci kanonicznej wzoru funkcji g: $\vec{v}=[-1,\,-12]$.

183. **a)** $x=3$; **b)** $x\in[0;\,2]\cup[4;\,6]$.

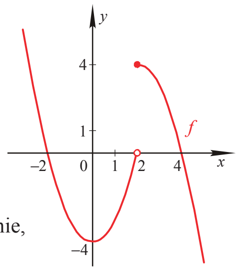
184. **a)** −2 i 13; **b)** $x\in(-7;\,+\infty)\setminus\{3\}$; **c)** $f(123456)=123453^2$.

185. **a)** $a>0$; **b)** $b<0$; **c)** $c>0$; **d)** $a^2-bc>0$; **e)** $b^2-ac>0$.

Rozwiązanie. **a)** Ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f, skierowane są do góry, więc $a>0$; **b)** $x_W=-\frac{b}{2a}>0$ i $a>0$, więc $b<0$;
c) $f(0)=c>0$; **d)** $bc<0$ (*bo* $b<0$ *i* $c>0$), więc $a^2-bc>0$; **e)** $\Delta>0$ (*bo funkcja f ma dwa miejsca zerowe*) i $ac>0$ (*bo* $a>0$ *i* $c>0$), więc $b^2-ac>b^2-4ac=\Delta>0$.

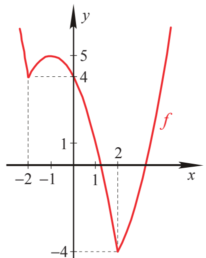
186. −3.

187. **a)** −2 i 4; **b)** Rys. 1/5M; **c)** $(-4;\,0)$.



Rys. 1/5M

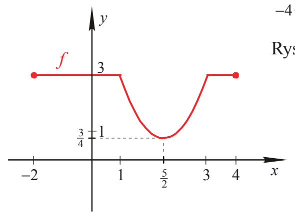
188. Rys. 2/5M; Dla $m\in(-\infty;\,-4)$ – brak rozwiązań, dla $m=-4$ – jedno rozwiązanie,
dla $m\in(-4;\,4)\cup(5;\,+\infty)$ – dwa rozwiązania,
dla $m\in\{4,\,5\}$ – trzy rozwiązania, dla $m\in(4;\,5)$ – cztery rozwiązania.



Rys. 2/5M

Wskazówki. I. $f(x)=x^2-2x-4$ dla $x\in(-\infty;\,-2]\cup[2;\,\infty)$, $f(x)=-x^2-2x+4$ dla $x\in(-2;\,2)$.
II. Liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$ określ, korzystając z wykresu funkcji f.

189. **a)** $f(0)=3$, $f(2)=1$, $f(4)=3$; **b)** $[0{,}75;\,3]$; **c)** Rys. 3/5M.



Rys. 3/5M

190. Miejscem zerowym jest każda liczba $x\in(-2;\,-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3};\,2)$.

Rozwiązanie. $[a]=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a\in[0;\,1)$. Zatem należy znaleźć te x, dla których $f(x)\in[0;\,1)$, czyli te x, które spełniają nierówności $f(x)\geq 0$ i $f(x)<1$.
Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)\geq 0$ jest zbiór $(-\infty,\,-\sqrt{3}\,]\cup[\,\sqrt{3};\,+\infty)$, a nierówności $f(x)<1$ zbiór $(-2;\,2)$, więc szukanymi wartościami x są $x\in(-2;\,-\sqrt{3}\,]\cup[\,\sqrt{3};\,2)$.

191. **a)** $b=7$, $c=10$; **b)** $(3,\,40)$ i $(-10;\,40)$; **c)** $x=-3{,}5$.

Rozwiązanie. **c)** Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f jest prosta prostopadła do osi OX przechodząca przez wierzchołek tej paraboli. Znajdujemy odciętą wierzchołka paraboli: $x_W=-\frac{7}{2\cdot 1}=-3{,}5$. Zatem osią symetrii jest prosta o równaniu $x=-3{,}5$.